

अध्ययन संस्थेचे उपक्रम

ज्ञान एखाद्याच्या डोक्यात ओतता येत नाही. परिसराचा अनुभव घेत व परिसराशी प्रयोग करत आपल्या डोक्यात ज्ञान साकारत असते.

शिक्षण शास्त्रातील या मूलभूत तत्वावर अध्ययन संस्थेचे शालेय पातळीवरील सर्व उपक्रम चालतात.

►► **डिस्कव्हर** : हा शाळांसाठी विकसित केलेला **सर्वांगीण शैक्षणिक गुणवत्ता विकास उपक्रम** आहे. या उपक्रमात प्रामुख्याने विज्ञान, गणित, भूगोल या विषयांच्या ज्ञानाबरोबरच त्या विषयाची कार्यपद्धती, कौशल्य, बोधात्मकता आणि उपयोजन यावर भर असतो. यासाठी शिक्षकांना आधारभूत ठरतील असे उपक्रम घेतले जातात. एखाद्या परिसरातील शाळांच्या समूहाबरोबर हा उपक्रम 3 वर्षांसाठी घेतला जातो.

►► **शिक्षक प्रशिक्षण** : संस्थेतर्फे शाळेच्या प्रत्येक स्तरावर शिक्षकांसाठी विज्ञान, गणित, भूगोल, बहिःशाल उपक्रम या संदर्भात प्रशिक्षण वर्ग घेण्यात येतात. मराठी शाळांमध्ये इंग्लिश भाषेचे प्रशिक्षण तसेच सेमी इंग्लिश वर्गांसाठी प्रशिक्षण वर्ग घेण्यात येतात.

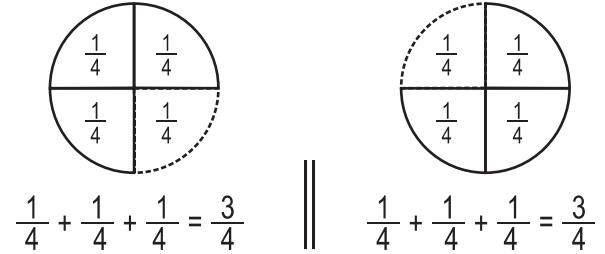
►► **बी.एड्. व डी.एड्. (भावी शिक्षक) प्रशिक्षण** : बी.एड्. महाविद्यालयात विज्ञान, गणित व भूगोल विषयांची कृतिसत्रे तर डी.एड्. महाविद्यालयात सर्व विषयांची कृतिसत्रे अध्ययन संस्थेतर्फे घेतली जातात.

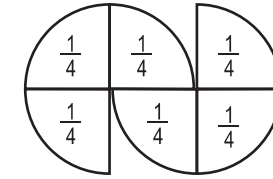
►► **मुलांसाठी** : विज्ञान व गणित विषयक कृतिसत्रे, खगोलशास्त्र व आकाश-दर्शन शिबिरे, पर्यावरण शिबिरे.

प्राथमिक गणित आकलन व कौशल्य मालिका

अपूर्णांक (बेरीज-वजाबाकी)

सविता आयरे
सारिका परब


$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad || \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



$$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

अध्ययन प्रकाशन

अपूर्णार्क
(बेरीज - वजाबाकी)

सविता आयरे
सारिका परब

अध्ययन - प्रकाशन
मुंबई

►► अपूर्णांक (बेरीज-वजाबाकी)

सविता आयरे
सारिका परब

►► या पुस्तकातील सर्व मजकूर व कल्पनांचे सर्व हक्क विद्यार्थी व शिक्षकांचे आहेत.

►► पुस्तकातील मजकूर किंवा कल्पना यांचा छापिल, इलेक्ट्रॉनिक किंवा इतर कोणत्याही स्वरूपात वापर करणार असल्यास त्याबद्दल **अध्ययन** संस्थेला कळवावे, ही विनंती.

►► प्रकाशक : श्री. राजीव वर्तक

अध्ययन प्रकाशन

12-ओक शेड,

देवनार बाग, मुंबई - 400 088.

►► e-mail: adhyayane@gmail.com

►► मुद्रक : किशोर प्रिंटस्

►► किंमत: रु.40/-

►► प्रकाशन: नोव्हेंबर 2012

►► सदर पुस्तकाच्या छपाईसाठी श्री. नरेश मेहता यांनी आर्थिक साहाय्य केले आहे.

►► सततचे प्रोत्साहन, मार्गदर्शन आणि इतर साहाय्य यासाठी अध्ययन संस्था केअरिंग फ्रेंड्स या अनौपचारिक गटाची आभारी आहे.

प्रस्तावना

प्राथमिक (इ.1 ली ते इ 4 थी) आणि उच्च प्राथमिक (इ. 5 वी ते 8 वी) इयत्तांत गणित शिकण्याची पूर्वतयारी व्हावी लागते. अपूर्णांक समजणे आणि त्यावरील सर्व क्रिया समजून करता येणे हे याच इयत्तांत पक्के होते. अपूर्णांकाचा अभ्यास म्हणजे सर्वच अंक पूर्ण नाहीत हे समजावून घेणे. या पूर्ण अंकांच्या दरम्यान काही अंक आहेत. अर्थातच ते अपूर्ण अंक आहेत. म्हणून ते अपूर्ण अंक म्हणजे अपूर्णांक. एखाद्या गोष्टीचे कितीही समान भाग होऊ शकतात. या सर्व भागांची बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार करण्यासाठी काही प्रक्रिया कराव्या लागतात. छेद समान का असावा लागतो ? तो समान कसा करतात ? या अत्यंत मूलभूत गोष्टी न समजल्याने कितीतरी मुलं गणितापासून दूर जातात. गणितातून होणारे हे दुसरे झॉप-आऊट. [पहिलं झॉप-आऊट पूर्णांकाच्या आकडेमोडीतील अचूकता व वेग (त्यातल्या त्यात वजाबाकी व भागाकार)]. गणिताच्या या झॉप - आऊटमुळे आपली मोठी लोकसंख्या गणिती विचारपध्दतीपासून दूर जाते.

अपूर्णांक - बेरीज आणि वजाबाकी या पुस्तकात छेद का समान करावा लागतो. छेद समान कसा करतात त्यासाठी अवयव आणि ल.सा.वि. चा वापर कसा करतात व अपूर्णांकाची बेरीज व वजाबाकी कशी करतात. याशिवाय अपूर्णांकाचा निरनिराळ्या प्रकारे वापरही दाखविला आहे.

गणिताचे महत्त्व आपण सगळे जाणतोच. विज्ञान व तंत्रज्ञानाच्या आजच्या प्रगतीच्या मुळाशीही गणितच आहे. गणिताशिवाय ही प्रगती शक्य नव्हती. यापुढे गणिताचा वापर हा प्रत्येक क्षेत्रात वाढणार आहे. त्यासाठी किमान माध्यमिक शाळेच्या पातळीवर गणित जाणणारी प्रजा हवी. गणित हा आपला सर्वांचा व्यावहारिक आणि सांस्कृतिक पाया बनायला हवा. तरच उत्कृष्ट गणितज्ञ घडू शकतील.

उद्या गणितज्ञांचीही मोठी गरज भासणार आहे. योग्यरित्या गणित शिकविल्यास आपल्या विद्यार्थ्यांची गणित शिकण्याची क्षमता नक्कीच चांगली आहे. त्यासाठी प्राथमिक व उच्च प्राथमिक इयत्तांत गणित प्रत्यक्ष अनुभवता येणे गरजेचे आहे. प्रत्यक्ष गणिताचा अनुभव आणि कागदावरील गणिती मांडणी यांची सांगड घालण्याची गरज आहे. प्राथमिक व उच्च प्राथमिक शिक्षकांना या पुस्तकातील अध्ययन - अध्यापन प्रक्रिया निश्चितच उपयोगी पडतील. पुस्तिकेतील प्रक्रिया सातत्याने वापरल्यास जास्तीत जास्त विद्यार्थ्यांना (जवळ जवळ सर्वच) अपूर्णांकाची बेरीज व वजाबाकी सहजपणे करता येते असा अनुभव आहे. पुस्तक वापरून आपला अनुभव जरूर कळवावा.

- श्री. राजीव वर्तक

अपूर्णाकाची ओळख

भारतीय गणित वर्ष 2012 च्या निमित्ताने गणित आकलन व उपयोजन मालिकेतील ही पुस्तके प्राथमिक व उच्च प्राथमिक इयत्तांत गणित शिकविणाऱ्या शिक्षकांसाठी प्रकाशित केली आहेत.

गणित आकलन व उपयोजन मालिकेतील पुस्तके :

1. अपूर्णाक - बेरीज व वजाबाकी
2. संख्यारेषा - चिन्हसंकेत व अपूर्णाक
3. समीकरण - एकरेषीय व एकचल

मालिकेतील आगामी प्रकाशने

1. अपूर्णाक - गुणाकार - भागाकार
2. अवयव - ल.सा.वि - म.सा.वि., विभाज्यता
3. शेकडेवारी
4. एकरेषीय - द्विचल समीकरणे

अपूर्णाकाचा अनुभव मुलांना लहानपणी आलेला असतो. साधारण चौथीच्या पातळीवर अपूर्णाक गणित म्हणून समजून घ्यायची तयारी झालेली असते. घरातील संभाषणात अर्धी भाकरी, अर्धे बिस्किट, अर्धे कलिंगड चार जणांनी मिळून खाल्ले वगैरे उल्लेख येत असतात. याशिवाय किरणला निबंधात दहा पैकी सहा गुण मिळाले असा उल्लेख देखील येतो. प्रगती पुस्तकातील गुणदेखील मुलांनी बघितलेले असतात. या सर्वांचा फायदा शिकवताना घेता येतो.

किरणला निबंधात दहापैकी सहा गुण मिळाले हे पुढील प्रकारे लिहिले जाते हे विद्यार्थ्यांना दाखवावे लागते.

$$\begin{aligned} \text{दहापैकी सहा म्हणजे } \frac{6}{10} \\ \text{शंभरपैकी पंच्याहत्तर म्हणजे } \frac{75}{100} \end{aligned}$$

चौथीच्या पातळीवर अपूर्णाक समजावून देताना नाणी व नोटांचा चांगला वापर करता येतो. यासाठी पुढील उदाहरणे बघा.

- 1) भारतात सध्या चलनात असणारे सर्वात कमी मूल्याचे नाणे म्हणजे 50 पैशाचे नाणे. पन्नास पैशांना एक चॉकलेट मिळते. एक रुपयाला दोन चॉकलेट्स मिळतात. म्हणजे एक रुपयाची किंमत 50 पैशांच्या दुप्पट आहे. म्हणजेच 50 पैशांची किंमत 1 रुपयाच्या तुलनेत अर्धी आहे.

$$\text{म्हणजे 50 पैसे} = \text{अर्धा रुपया}$$

$$50 \text{ पैसे} = \frac{1}{2} \text{ रुपया}$$

$$\frac{1}{2} \text{ ला आपण एक छेद दोन असे म्हणतो.}$$

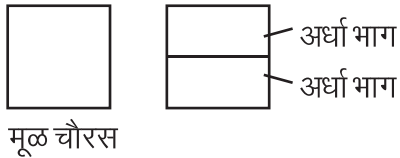
पुढीलपैकी काही अनुभव द्यावा व काही विद्यार्थ्यांनाच विकसित करायला सांगावे.

- 5 रुपये हे रु.10 चे अर्धे म्हणजे $\frac{1}{2}$ आहेत.
- 10 रुपये हे रु. चे अर्धे म्हणजे $\frac{1}{2}$ आहेत.
- 50 रुपये हे रु. चे अर्धे म्हणजे $\frac{1}{2}$ आहेत.
- हे रु.1000 चे अर्धे म्हणजे $\frac{1}{2}$ आहेत.

- 2) पन्नास पैशांची 4 नाणी मिळविल्यास 2 रुपये होतात. म्हणजे 50 पैसे हा रु.2/- चा पाव भाग आहे. पाव भाग आपण $\frac{1}{4}$ या प्रकारे लिहितो. दोन रुपयांची 5 नाणी एकत्र केल्यास 10/- रुपये होतात म्हणजे 10/- रुपयांसापेक्ष दोन रुपये हे $\frac{1}{5}$ आहेत.

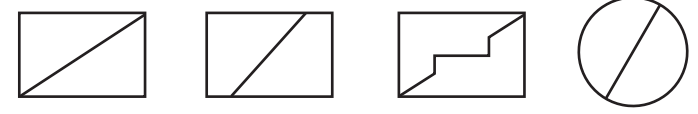
वरील व्यावहारिक कल्पनांबरोबर दृश्य भौमितिक कल्पनांचा वापरही अपूर्णाक समजायला उपयोगी ठरतात. ज्या विद्यार्थ्यांच्या घरात फारसा भाषेचा वापर होत नाही त्यांना मुख्य प्रवाहात आणण्यासाठी दृश्य भौमितिक कल्पनांची खूप गरज असते.

- 3) $\frac{1}{2}$ समजावणे:- 30 सेमी X 30 सेमी चौरस आकाराचे दोन पुढे घेऊन त्यातील एक पुढा आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे कापून दोन्ही भाग एकमेकांशी जुळतील असे करावेत.



मुलांना दाखविताना पूर्ण चौरस दाखवून “हा एक”, लगेचच त्याचा अर्धा भाग वेगळा करून “हा त्याचा अर्धा”. म्हणजे हा एक तर हा $\frac{1}{2}$. हे सातत्याने 3 ते 4 वेळा सांगावे. हे सांगताना झालेले दोन्ही भाग सारखेच आहेत हे

दाखवावेत. तसेच दोन्ही भाग $\frac{1}{2}$ आहेत हे समजावून द्यावे. दोन अर्धे भाग म्हणजे 1 हेही सतत दाखवावे. चौरस पुढील प्रकारे कापूनही ही प्रक्रिया करावी. तसेच वर्तुळाचेही दोन भाग म्हणजे $\frac{1}{2}$ आहेत हे दाखवावे. कापलेले दोन्ही भाग तंतोतंत सारखे आहेत हे दाखवत राहणे गरजेचे आहे.



- 4) $\frac{1}{4}$ समजावणे - एकाच आकृतीचे 4 समान भाग केल्यास प्रत्येक भाग हा $\frac{1}{4}$ ठरतो. चारही भाग सारखे आहेत हे जुळवून दाखवता येतात. $\frac{1}{2}$ भागाचा $\frac{1}{2}$ म्हणजे प्रत्येक भाग हा $\frac{1}{4}$ आहे हे दाखविल्यास मुलांची समज वाढते.



- 5) $\frac{1}{3}$ समजावणे - यासाठी वर्तुळ, चौरस, आयत, समभुज त्रिकोण हे खालीलप्रमाणे कापून दाखवता येतात.

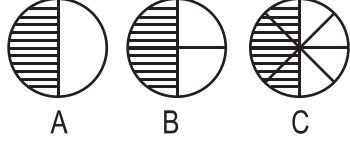


महत्वाचे : दोन वेळा $\frac{1}{2}$ म्हणजे 1, तीन वेळा $\frac{1}{3}$ म्हणजे 1, तसेच चार वेळा $\frac{1}{4}$ म्हणजे 1. हे दाखवून समजावून द्यावे.

• • •

सममूल्य अपूर्णाक

सारख्याच त्रिज्येची तीन वर्तुळे घेतली.



वर्तुळातील रेखांकित भाग पाहूया.

'A' वर्तुळात अर्धा भाग म्हणजे $\frac{1}{2}$ भाग रेखांकित केला आहे.

'B' वर्तुळात 4 भागांपैकी 2 भाग म्हणजे $\frac{2}{4}$ रेखांकित केले आहेत.

'C' वर्तुळात 8 भागांपैकी 4 भाग म्हणजे $\frac{4}{8}$ रेखांकित केले आहेत.

तिन्ही वर्तुळातील रेखांकित केलेल्या भागांचे निरीक्षण करा. रेखांकित भागांची संख्या वाढली, पण वर्तुळातील रेखांकित भाग तेवढाच आहे.

यावरून $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ हे अपूर्णाक किंमतीने सारखे आहेत. किंमतीने सारखे अथवा समान असलेल्या या अपूर्णाकांना **सममूल्य अपूर्णाक** म्हणतात.

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ या सममूल्य अपूर्णाकाच्या अंश व छेदाचे निरीक्षण करा.

अंशात 1 च्या दुप्पट 2

2 च्या दुप्पट 4

छेदात 2 च्या दुप्पट 4

4 च्या दुप्पट 8

येथे अंश दुप्पटीने बदलत आहे. त्याच पटीत छेदही बदलत आहे.

यावरून लक्षात येते की, **सममूल्य अपूर्णाकाचे अंश ज्या पटीत बदलतात त्याच पटीत त्यांचे छेद सुद्धा बदलतात.**

सममूल्य अपूर्णाक तयार करण्यासाठी अपूर्णाकाच्या छेदाला व अंशाला एकाच संख्येने गुणावे किंवा भागावे.

उदाहरणार्थ :

$\frac{1}{3}$ याचा सममूल्य अपूर्णाक मिळविण्यासाठी या अपूर्णाकाच्या अंशाला व छेदाला 2 ने गुणूया.

$$\text{म्हणून } \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{6}$$

आणखी सममूल्य अपूर्णाक मिळविण्यासाठी या अपूर्णाकाच्या अंशाला व छेदाला 3 ने गुणूया.

$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{3}{9}$$

$\frac{3}{9}$ च्या अंशाला व छेदाला 3 ने भागल्यास मूळ अपूर्णाक मिळतो.

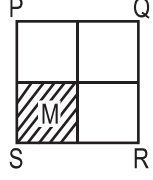
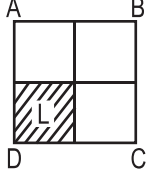
$$\frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$$

येथे, $\frac{2}{6}$ च्या अंशाला व छेदाला 2 ने भागल्यास मूळ अपूर्णाक मिळतो.

$$\frac{2 \div 2}{6 \div 2} = \frac{1}{3}$$

अपूर्णाकाची बेरीज व वजाबाकी

अपूर्णाकाचा छेद समान असताना बेरीज व वजाबाकी :



चौरस ABCD व चौरस PQRS
यांचे समान 4 भाग केले आहेत.

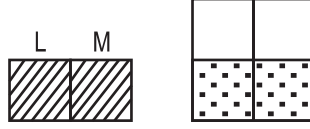
चौरस ABCD मधील रेखांकित केलेला

चौरस L हा $\frac{1}{4}$ एवढा झाला.

चौरस PQRS मधील रेखांकित केलेला

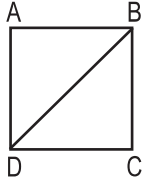
चौरस M हा $\frac{1}{4}$ एवढा झाला.

चौरस L व चौरस M एकत्र केल्यास ते मूळ चौरसाच्या अर्धा म्हणजे $\frac{1}{2}$ एवढा आहे.



हेच आपण पुढीलप्रमाणे मांडूया.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{2}{4} \text{ व } \frac{1}{2} \text{ हे सममूल्य अपूर्णाक आहेत.} \right)$$

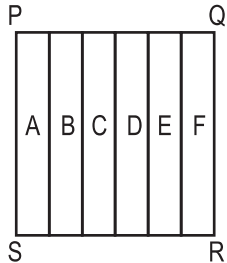


सोबत दिलेल्या चौरस ABCD चे समान दोन भाग केले.

म्हणजे प्रत्येक भाग हा $\frac{1}{2}$ म्हणजे अर्धा आहे.

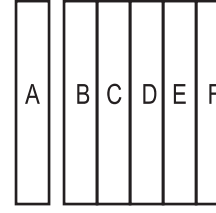
चौरस ABCD हा दोन समान अर्ध्या भागापासून तयार झाला आहे.

$$\text{म्हणजेच, } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$



PQRS या आयताचे 6 समान भाग केले आहेत.

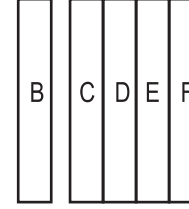
म्हणजे प्रत्येक भाग $\frac{1}{6}$ आहे.



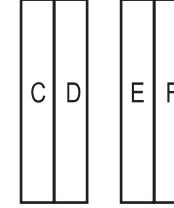
PQRS या आयतामधून A आयत म्हणजे $\frac{1}{6}$ भाग काढून टाकला तर $\frac{5}{6}$ भाग उरतात.

$$\text{म्हणजेच } 1 - \frac{1}{6} \quad \left[1 \text{ म्हणजे } \frac{6}{6} \right]$$

$$\therefore \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$



आता B, C, D, E, F पैकी B भाग काढून टाकला म्हणजे आणखी $\frac{1}{6}$ भाग काढला. तर $\frac{4}{6}$ भाग उरतात.



आता उरलेल्या भागांपैकी C व D भाग बाजूला केले.

$$\text{म्हणजे } \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

भाग बाजूला केले तर $\frac{2}{6}$ भाग उरतात.



उरलेल्या E, F भागांमध्ये D भाग जोडला.

म्हणजे $\frac{2}{6}$ मध्ये $\frac{1}{6}$ जोडला तर $\frac{3}{6}$ भाग होतात.

$$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6}$$

या सर्व उदाहरणांवरून लक्षात येते की, अपूर्णाकाची बेरीज किंवा वजाबाकी करताना, जर छेद समान असतील तर,

i) बेरीज करताना छेद तसाच ठेवून अंशस्थानच्या संख्यांची बेरीज करावी.

$$\text{उदा. } \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \frac{2+3}{8} = \frac{5}{8}$$

ii) वजाबाकी करताना छेद तसाच ठेवून अंशस्थानच्या संख्यांची वजाबाकी करावी.

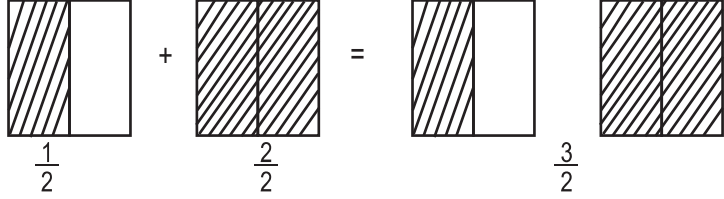
$$\text{उदा. } \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8}$$

...

अंशाधिक अपूर्णाक

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

इथे बेरजेनंतर अंश छेदापेक्षा मोठा झाला. या अपूर्णाकाला अंशाधिक अपूर्णाक म्हणतात. हा कसा व्यक्त करतात हे पाहूया.



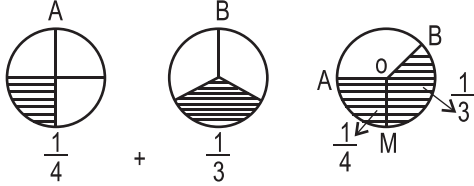
$$\frac{3}{2} \text{ म्हणजे } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}, \text{ हे } 3 \text{ वेळा म्हणजेच } \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

अपूर्णाकाचा छेद असमान असताना बेरीज व वजाबाकी

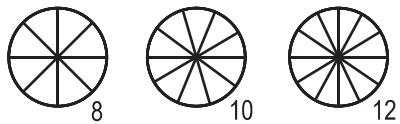
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

हे उदाहरण कसे सोडवायचे हे पाहूया.



A व B ही समान त्रिज्येची दोन वर्तुळे आहेत. A मधील $\frac{1}{4}$ भाग व B मधील $\frac{1}{3}$ भाग मिळविल्यास म्हणजे एकत्र केल्यास तो भाग त्या वर्तुळाचा कितवा भाग आहे ?

समान भाग (पाकळ्या) केलेली त्याच त्रिज्येची काही पारदर्शक वर्तुळे आहेत. त्यापैकी कोणत्या वर्तुळातील पाकळ्यांच्या खुणा $\frac{1}{4}$ भागाच्या सुरुवातीच्या रेषेपासून ते $\frac{1}{3}$ च्या शेवटच्या रेषेपर्यंत (म्हणजे OA ते OB) जुळतात ?



या वर्तुळांपैकी बारा समान भाग केलेल्या वर्तुळातील खुणा OA व OB शी एकाच वेळी जुळतात.

$$12 \text{ समान भागांपैकी } 7 \text{ भाग म्हणजे } \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

$$\text{याचा अर्थ, } \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} \quad \text{याचा गणिती अर्थ समजून घेऊया.}$$

छेदस्थानी 4 व 3 आहेत. यांचा लसावि 12 येतो.

$\frac{1 \times 3}{4 \times 3} + \frac{1 \times 4}{3 \times 4}$ छेदस्थानी 12 यावे म्हणून $\frac{1}{4}$ च्या छेदाला व अंशाला 3 ने गुणूया व $\frac{1}{3}$ च्या छेदाला व अंशाला 4 ने गुणूया. (यामुळे मूळ अपूर्णाकाची किंमत बदलत नाही).

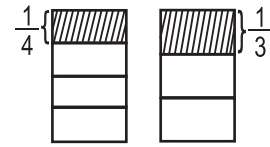
$$\frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

अशारितीने छेद समान नसताना बेरीज किंवा वजाबाकी करताना लसावि पध्दतीने अपूर्णाकाचे छेद समान करून त्या अपूर्णाकाची बेरीज किंवा वजाबाकी करता येते.

अपूर्णाकाच्या बेरीज व वजाबाकीची उदाहरणे कागदी पट्टीनेही सोडवता येतील.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

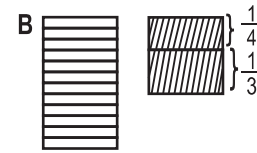
सारख्याच आकाराच्या दोन पट्ट्या घेतल्या.



पहिल्या पट्टीचे चार समान भाग केले.

दुसऱ्या पट्टीचे तीन समान भाग केले.

पहिल्या पट्टीतला $\frac{1}{4}$ भाग व दुसऱ्या पट्टीतला $\frac{1}{3}$ भाग एकत्र केला.



हा भाग सारख्याच आकाराच्या पण 12 समान भाग असणाऱ्या 'B' पट्टीच्या बाजूला जोडून ठेवला.

B पट्टीच्या 7 व्या भागापर्यंत $\frac{1}{4}$ व $\frac{1}{3}$ यांचा एकत्रित भाग जुळतो.

म्हणून $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ यांची बेरीज ही 'B' पट्टीतल्या 7 भागांइतकी आहे. हे 7 भाग 12 भागांपैकी आहेत. म्हणून $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

'B' पट्टीचे समान 12 भाग केले. हे 12 भाग म्हणजे 4 व 3 यांचा लसावि आहे.

लसावि शोधण्याची अवयव पध्दत :

1) 4 व 3 चा लसावि अवयव पध्दतीने काढूया.

$$4 = 2 \times 2 \times 1$$

$$3 = 3 \times 1$$

लसावि = सामाईक अवयव x असामाईक अवयव

$$= 1 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$= 12$$

2) 4 व 5 चा लसावि

$$4 = 2 \times 2 \times 1$$

$$5 = 5 \times 1$$

लसावि = सामाईक अवयव x असामाईक अवयव

$$= 1 \times 2 \times 2 \times 5$$

$$= 20$$

3) 20 व 5 चा लसावि

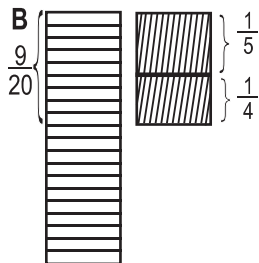
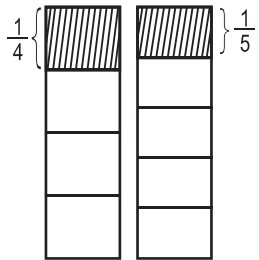
$$20 = 2 \times 2 \times 5$$

$$5 = 5 \times 1$$

लसावि = सामाईक अवयव x असामाईक अवयव

$$= 5 \times 2 \times 2$$

$$= 20$$



I) आणखी एक उदाहरण पाहूया.

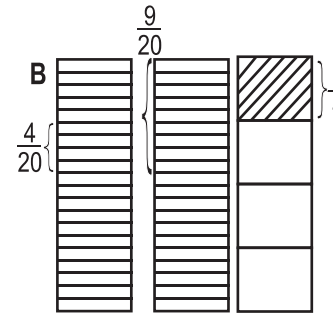
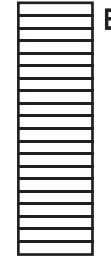
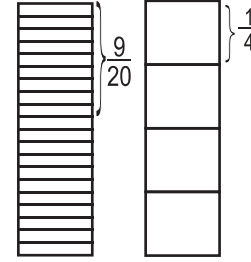
समान आकाराच्या दोन पट्ट्या घेतल्या.

पहिल्या पट्टीचे 4 समान भाग केले. त्यातला 1 भाग $\frac{1}{4}$ आहे. दुसऱ्या पट्टीचे 5 समान भाग केले. त्यातला 1 भाग $\frac{1}{5}$ आहे. 4 व 5 चा लसावि 20 आहे. म्हणून तिसरी पट्टी 'B' चे 20 समान भाग केले. या पट्टीच्या बाजूला $\frac{1}{4}$ भाग व $\frac{1}{5}$ भाग एकत्र ठेवले. हा भाग 20 भाग असणाऱ्या पट्टीतील 9 भागांशी जुळतो. म्हणजे $\frac{9}{20}$ भागांशी जुळतो.

म्हणून $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ यांची बेरीज ही $\frac{9}{20}$ येते. . . .

अपूर्णाकाची वजाबाकी

$$\frac{9}{20} - \frac{1}{4}$$



समान आकाराच्या दोन पट्ट्या घेतल्या.

पहिल्या पट्टीचे 20 समान भाग केले. त्यातले 9 भाग म्हणजे $\frac{9}{20}$.

दुसऱ्या पट्टीचे 4 समान भाग केले. त्यातला 1 भाग म्हणजे $\frac{1}{4}$.

4 व 20 यांचा लसावि 20 येतो. म्हणून तिसरी पट्टी 'B' चे 20 समान भाग केले.

या पट्टीच्या बाजूला $\frac{9}{20}$ भाग व $\frac{1}{4}$ भाग ठेवले.

'B' पट्टी सापेक्ष $\frac{9}{20}$ भागामध्ये $\frac{1}{4}$ भागापेक्षा किती भाग जास्त आहेत? किंवा $\frac{9}{20}$ भागांतून $\frac{9}{20}$ भाग कमी केल्यावर किती उरतात? आकृतीमधून लक्षात येते की, $\frac{9}{20}$ म्हणजे 20 भागांपैकी 9 भाग व $\frac{1}{4}$ म्हणजे 20 भागांपैकी 5 भाग.

म्हणून $\frac{9}{20} - \frac{1}{4}$ (म्हणजेच 9 भागांतून 5 भाग कमी केल्यावर 4 भाग उरतात.)

हे भाग B पट्टीमधल्या 4 भागांशी जुळतात. म्हणजेच 20 भागांपैकी 4 भाग होय.

$$\text{म्हणून } \frac{9}{20} - \frac{1}{4} = \frac{4}{20} \text{ म्हणजेच } \frac{1}{5}$$

हेच आपण पुढीलप्रमाणे सोडवूया.

$$\frac{9}{20} - \frac{1}{4}$$

छेद समान करण्यासाठी 20 व 4 यांचा लसावि काढला. लसावि 20 येतो. पहिल्या अपूर्णाकात छेद 20 आहे. परंतु दुसऱ्या अपूर्णाकात छेद 20 येण्यासाठी अंशाला व छेदाला 5 ने गुणू.

$$\therefore \frac{9}{20} - \frac{1 \times 5}{4 \times 5}$$

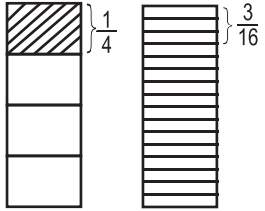
$$= \frac{9}{20} - \frac{5}{20}$$

$$= \frac{4}{20} \quad \text{येथे अंशाला व छेदाला 4 ने भागल्यास त्याचा सममूल्य अपूर्णाक मिळतो.}$$

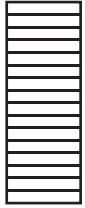
$$= \frac{4 \div 4}{20 \div 4}$$

$$= \frac{1}{5}$$

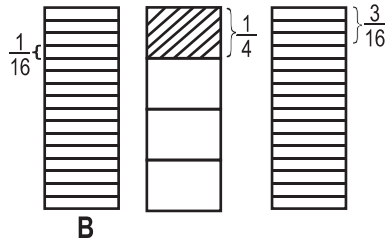
$$2) \quad \frac{1}{4} - \frac{3}{16}$$



4 भाग दाखविले आहेत. समान आकाराच्या दोन पट्ट्या घेतल्या. पहिल्या पट्टीचे समान 4 भाग केले. त्यातला 1 भाग म्हणजे $\frac{1}{4}$ होय. दुसऱ्या पट्टीचे समान 16 भाग केले. त्यातले 3 भाग म्हणजे $\frac{3}{16}$ होय.



4 व 16 चा लसावि 16 येतो. म्हणून तिसऱ्या 'B' पट्टीचे 16 भाग केले.



4 भाग दाखविले आहेत.

'B' पट्टीच्या बाजूला दोन्ही पट्ट्या ठेवल्या.

$\frac{1}{4}$ भागातून $\frac{3}{16}$ भाग कमी केल्यावर

'B' पट्टीमध्ये किती भाग उरतात ?

'B' पट्टीमध्ये $\frac{1}{16}$ भाग उरतो.

$$\text{म्हणून } \frac{1}{4} - \frac{3}{16} = \frac{1}{16}$$

हे आपण प्रत्यक्ष सोडवूया.

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{16}$$

छेद समान करण्यासाठी 4 व 16 यांचा लसावि काढला. लसावि 16 येतो.

$\frac{1}{4}$ या अपूर्णाकात छेद 16 येण्यासाठी अंशाला व छेदाला 4 ने गुणू.

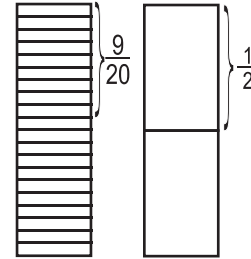
$$\frac{1}{4} \times \frac{4}{4} - \frac{3}{16}$$

$$= \frac{4}{16} - \frac{3}{16}$$

$$= \frac{1}{16}$$

वरील दोन्ही उदाहरणांत पहिला अपूर्णाक हा दुसऱ्या अपूर्णाकापेक्षा मोठा आहे. दुसरा अपूर्णाक मोठा असल्यास होणारी वजाबाकी आपण पाहूया.

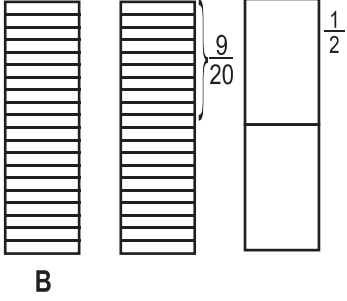
$$\frac{9}{20} - \frac{1}{2}$$



समान आकाराच्या दोन पट्ट्यांमध्ये पहिल्या पट्टीचे 20 समान भाग केले. त्यातले 9 भाग म्हणजे $\frac{9}{20}$



दुसऱ्या पट्टीचे 2 समान भाग केले. त्यातला 1 भाग म्हणजे $\frac{1}{2}$ होय. 20 व 2 यांचा लसावि 20 येतो म्हणून 'B' पट्टीचे 20 समान भाग केले.



'B' पट्टी शेजारी $\frac{9}{20}$ भाग व $\frac{1}{2}$ भाग असणाऱ्या पट्ट्या ठेवल्या. 'B' पट्टी सापेक्ष $\frac{9}{20}$ भागातून $\frac{1}{2}$ भाग कमी केल्यास किती भाग उरतात ? येथे $\frac{9}{20}$ भाग हे $\frac{1}{2}$ भागांपेक्षा कमी आहेत. म्हणून $\frac{9}{20}$ भागांमध्ये $\frac{1}{2}$ भागांपेक्षा 1 भाग कमी आहे. हा भाग 'B' पट्टीतील 1 भागाशी जुळतो. परंतु येथे $\frac{1}{2}$ हा भाग $\frac{9}{20}$ भागापेक्षा मोठा असल्याने उत्तर - येते $-\frac{1}{20}$ (म्हणजेच $\frac{1}{20}$)

हेच प्रत्यक्ष मांडणी करून सोडवूया.

$$\frac{9}{20} - \frac{1}{2}$$

छेद समान करण्यासाठी 20 व 2 चा लसावि काढला. 20 व 2 यांचा लसावि 20 येतो. म्हणून $\frac{1}{2}$ च्या अंशाला व छेदाला 10 ने गुणू.

$$= \frac{9}{20} - \frac{1 \times 10}{2 \times 10}$$

$$= \frac{9}{20} - \frac{10}{20}$$

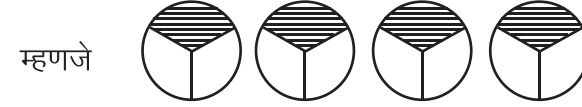
$$= -\frac{1}{20}$$

...

पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक

यापूर्वी आपण अंशाधिक अपूर्णाकाचा अनुभव घेतला आहे. उदाहरणार्थ $\frac{4}{3}$ हा अपूर्णांक कसा व्यक्त करतात हे पाहूया.

$$\frac{4}{3} \text{ म्हणजे } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$



$$\frac{4}{3} \text{ मध्ये } \frac{1}{3} \text{ यांची 4 वेळा बेरीज करतो.}$$

$$\text{म्हणजे, } \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$$

हेच पुढीलप्रमाणे मांडूया.



$$\frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

किंवा

$$1 \text{ पूर्ण } + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$1\frac{1}{3}$ याला पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक म्हणतात. पूर्णांकयुक्त अपूर्णाकाची आणखी उदाहरणे पाहूया.

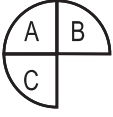
A, B, C, D, E, F, G, H, I हे वर्तुळाचे प्रत्येकी $\frac{1}{4}$ भाग आहेत.



$$A = \frac{1}{4} \text{ म्हणजे 4 भागांमधील 1 भाग.}$$



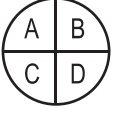
$$A + B = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \text{ म्हणजे 4 भागांमधील 2 भाग.}$$



$$A+B+C = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

किंवा, 3 वेळा $\frac{1}{4}$

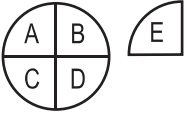
$$\therefore 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



$$A+B+C+D = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4}$$

किंवा, 4 वेळा $\frac{1}{4}$

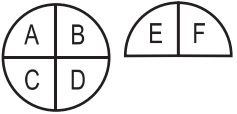
$$\therefore 4 \times \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ पूर्ण}$$



$$A+B+C+D+E = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

किंवा, 5 वेळा $\frac{1}{4}$

$$\therefore 5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$



$$A+B+C+D+E+F = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4}$$

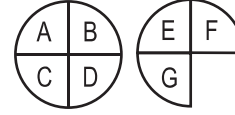
म्हणजे 6 वेळा $\frac{1}{4}$

$$\therefore 6 \times \frac{1}{4} = \frac{6}{4}$$

किंवा, 1 पूर्ण $\frac{2}{4}$

$1 \frac{2}{4}$ हे 1 पूर्णाक 2 छेद 4 असे वाचतात.

$$A+B+C+D+E+F+G = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

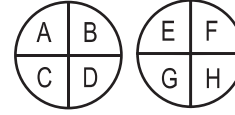


म्हणजे 7 वेळा $\frac{1}{4}$

$$\therefore 7 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

किंवा, 1 पूर्ण $\frac{3}{4}$ म्हणजेच $1 \frac{3}{4}$

$$A+B+C+D+E+F+G+H = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8}{4}$$

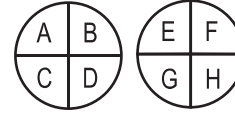


म्हणजे 8 वेळा $\frac{1}{4}$

$$\therefore 8 \times \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$\frac{8}{4}$ किंवा 2 पूर्ण

$$A+B+C+D+E+F+G+H+I = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$



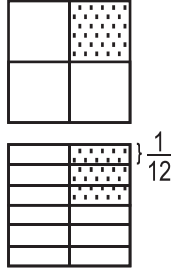
किंवा, 9 वेळा $\frac{1}{4}$

$$\therefore 9 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

म्हणजे 2 पूर्ण $\frac{1}{4} = 2 \frac{1}{4}$

म्हणजेच $2 + \frac{1}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

अपूर्णाकाचा गुणाकार



$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$ म्हणजे $\frac{1}{4}$ हे $\frac{1}{3}$ वेळा

आता या $\frac{1}{4}$ भागातून $\frac{1}{3}$ भाग मिळवायचा, म्हणजे $\frac{1}{4}$ चे पुन्हा 3 भाग करायचे.

हे करताना मूळ चौरसाच्या संदर्भात $\frac{1}{4}$ चा $\frac{1}{3}$ भाग म्हणजे $\frac{1}{12}$ होय.

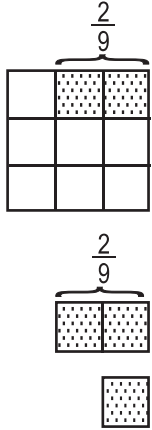
म्हणून $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$ म्हणजे $\frac{1}{4}$ हे, $\frac{1}{3}$ वेळा म्हणजे $\frac{1}{12}$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

अपूर्णाकाचा गुणाकार करताना अंशाला व छेदाने छेदाला गुणावे.

अशी गुणाकाराची काही उदाहरणे पाहूया.

1) $\frac{2}{9} \times \frac{1}{2}$



$\frac{2}{9} \times \frac{1}{2}$ म्हणजे $\frac{2}{9}$ चे $\frac{1}{2}$ किंवा $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{2}$ वेळा म्हणजे

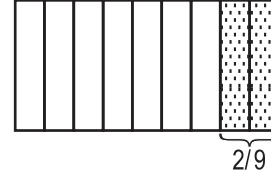
$\frac{2}{9}$ चा अर्धा भाग म्हणजे मूळ चौरसाच्या संदर्भात $\frac{1}{9}$ होय.

$\frac{2}{9}$ चा अर्धा म्हणजे $\frac{1}{9}$.

हेच गणिती मांडणी करून सोडवूया.

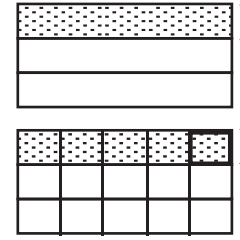
1) $\frac{2}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$ किंवा $\frac{2}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$

$\frac{2}{9} \times \frac{1}{2}$ पुढील पध्दतीने पाहूया.



एका आयताचे 9 समान भाग केले. त्यातले दोन भाग म्हणजे $\frac{2}{9}$
 $\frac{2}{9}$ चा अर्धा म्हणजे $\frac{1}{9}$ भाग
हा भाग मूळ आकृतीसापेक्ष $\frac{1}{9}$ आहे.

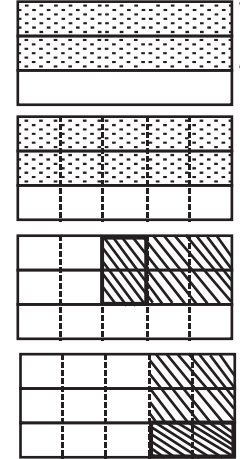
2) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$



$\frac{1}{3}$ एका आयताचे 3 समान भाग केले त्यातला एक भाग म्हणजे $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ हे, $\frac{1}{5}$ वेळा किंवा $\frac{1}{3}$ चा $\frac{1}{5}$ भाग हा मूळ आकृतीसापेक्ष $\frac{1}{15}$ भाग आहे.

3) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$



$\frac{2}{3}$ एका आयताचे 3 समान भाग केले. त्यातले दोन भाग म्हणजे $\frac{2}{3}$.

$\frac{2}{3}$ चा $\frac{3}{5}$ भाग म्हणजे $\frac{2}{3}$ चे 5 समान भाग करून त्यातले 3 भाग हे मूळ आकृतीसापेक्ष $\frac{6}{15}$ भाग.

आकृतीतील दोन आयत. सोबतच्या आकृतीप्रमाणे बसविले तर उभ्या केलेल्या भागांपैकी रेखांकित भाग हा $\frac{2}{5}$ एवढा येतो.

हेच पुढीलप्रमाणे सोडविता येते.

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \quad \text{किंवा} \quad \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

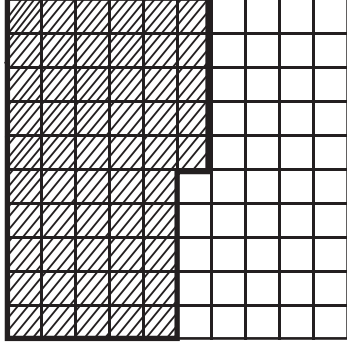
दशांश अपूर्णांक

$\frac{3}{10}$ या अपूर्णाकात अंश 3 व छेद 10 आहे. यालाच 10 पैकी 3 असेही म्हणतात.

तो खालीलप्रमाणे व्यक्त करतात.



$\frac{55}{100}$ म्हणजे 100 पैकी 55, म्हणजे 55 छेद 100



वरील दोन्ही अपूर्णाकांचे छेद 10 व 10 च्या शून्येतर घातांकांच्या पटीत आहेत. या अपूर्णाकाला दशांश अपूर्णांक म्हणतात.

10 च्या घातांकांच्या स्वरूपातील संख्या म्हणजे,

$$\begin{aligned} 10^1 &= 10 & 10^{-1} &= \frac{1}{10} \\ 10^2 &= 100 & 10^{-2} &= \frac{1}{100} \\ 10^3 &= 1000 & 10^{-3} &= \frac{1}{1000} \\ 10^4 &= 10000 & 10^{-4} &= \frac{1}{10000} \end{aligned}$$

वरील उदाहरणातील $\frac{3}{10}$ घेऊ

$\frac{3}{10}$ हा छेदाधिक अपूर्णांक आहे.

i) $\frac{3}{10}$ हे भागाकाराच्या स्वरूपात पुढीलप्रमाणे मांडतात.

$$\begin{array}{r} 0.3 \\ 10 \overline{) 3} \\ \underline{- 0} \\ 30 \\ \underline{- 30} \\ 00 \end{array}$$

$\frac{3}{10}$ हे 0.3 या स्वरूपातही लिहितात. 0.3 ला आपण 3 दशांश म्हणतो.

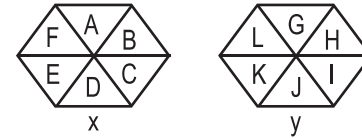
ii) $\frac{3}{100}$ हे भागाकाराच्या स्वरूपात मांडूया.

$$\begin{array}{r} 0.03 \\ 100 \overline{) 3} \\ \underline{- 0} \\ 30 \\ \underline{- 00} \\ 300 \\ \underline{- 300} \\ 000 \end{array}$$

म्हणजे $\frac{3}{100}$ हे 0.03 असेही लिहितात. 0.03 या 3 शतांश म्हणतात.

याप्रमाणेच $\frac{3}{1000}$ हे 0.003 असे लिहितात आणि त्याला 3 सहस्रत्रांश म्हणतात.

आता अंशाधिक अपूर्णाकांचे दशांशातील रूप पाहूया.



x व y हे दोन षटकोन आहेत. त्यातील प्रत्येक भाग हा $\frac{1}{6}$ आहे.

A + B + C + D + E + F + G घेतल्यास $\frac{1}{6}$ हे 7 वेळा होतात.

$$\text{म्हणजे } \frac{1}{6} \times 7 = \frac{7}{6}$$

यापूर्वीच्या छेदाधिक अपूर्णाकांची किंमत ही 1 पेक्षा कमी होती.

$\frac{1}{6}$ हा सहा भागांपैकी 1 भाग.

$\frac{6}{6}$ म्हणजे 6 भागांपैकी सर्व 6 भाग म्हणजे 1 पूर्ण.

$\frac{7}{6}$ म्हणजे 1 व $\frac{1}{6}$ भाग.

हेच आपण $1\frac{1}{6}$ असेही लिहितो. म्हणजे अंशाधिक अपूर्णाकाची किंमत ही 1 पेक्षा जास्त असते.

$\frac{7}{6}$ याची किंमत काढूया. त्यासाठी 7 ला 6 ने भागूया.

$$\begin{array}{r} 1.16 \\ 6 \overline{) 7} \\ - 6 \\ \hline 1 \\ \downarrow \\ 10 \\ - 6 \\ \hline 40 \\ - 36 \\ \hline 4 \end{array}$$

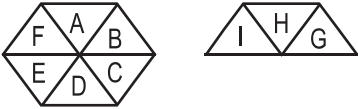
नेहमी प्रमाणेच भाग द्या.

आता 'शून्य' घेतला व पुन्हा 6 ने भाग दिला. मात्र हा भाग देताना 1 नंतर दशांश चिन्ह देतात.

येथे पुन्हा 'शून्य' घेऊन प्रक्रिया चालू ठेवली.

$$\text{म्हणजे } \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6} = 1.16$$

आता समजा, आपण $A+B+C+D+E+F+G+H+I$ घेतले.



म्हणजे $\frac{1}{6}$ हे 9 वेळा घेतले.

$$\text{म्हणजे } \frac{1}{6} \times 9 = \frac{9}{6}$$

हे आपण भागाकाराच्या स्वरूपात मांडूया.

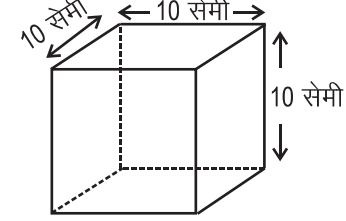
$$\begin{array}{r} 1.5 \\ 6 \overline{) 9} \\ - 6 \\ \hline 30 \\ - 30 \\ \hline 00 \end{array}$$

9 ला 6 ने 1 चा भाग दिला. बाकी 3 आली.
या आधीचे उदाहरण लक्षात घेऊन हे
उदाहरण सोडवूया.

(1 च्या पुढे दशांश चिन्ह दिले)

$$\text{म्हणजे } \frac{9}{6} = 1\frac{3}{6} = 1\frac{1}{2} = 1.5 \text{ (म्हणजे दीड)}$$

दशांश अपूर्णाक समजण्यासाठी धारकतेचे उदाहरण पाहूया.



आकृतीत दाखविलेल्या या घनाची प्रत्येक बाजू 10 सेमी आहे. या घनाचे घनफळ $10 \times 10 \times 10$ म्हणजे 1000 घन सेमी आहे.

1000 घन सेमी म्हणजे 1लीटर होय.

1 लीटर म्हणजे 1000 मिली.

समजा, आपल्याकडील एक भांडे 200 मिली म्हणजे 200 घनसेमीचे आहे. म्हणजे त्याची धारकता 200 मिली आहे. हे 200 मिलीचे भांडे 5 वेळा पाण्याने भरून जर वर दाखविलेल्या घनाच्या आकाराच्या भांड्यात ओतले तर 1 लीटरचे होईल.

याचा अर्थ 200 मिली म्हणजे $\frac{1}{5}$ लीटर

किंवा

$\frac{1}{5}$ लीटर 5 वेळा म्हणजे 1 लीटर

समजा 200 मिली चे भांडे 8 वेळा भरले.
म्हणून 200 मिली x 8 = 1600 मिली

1600 मिली = 1 लीटर आणि 600 मिली

200 मिली = $\frac{1}{5}$ लीटर

$\therefore \frac{1}{5}$ लीटर x 8 = $\frac{8}{5}$ लीटर

$\frac{8}{5}$ चे दशांश अपूर्णाकात रुपांतर करुया.

$$\begin{array}{r} 1.6 \\ 5 \overline{) 8} \\ - 5 \\ \hline 30 \\ - 30 \\ \hline 00 \end{array}$$

म्हणजे 1.6 लीटर

याचा अर्थ

1 लीटर आणि 600 मिली

समजा 250 मिलीची 23 भांडी भरली.

म्हणजे 250 मिली x 23 = 5750 मिली

5750 मिली = 5 लिटर 750 मिली

250 मिली म्हणजे $\frac{1}{4}$ लीटर

म्हणून $\frac{1}{4} \times 23 = \frac{23}{4}$ लीटर

$\frac{23}{4}$ दशांश अपूर्णाकात रुपांतर करुया.

$$\begin{array}{r} 5.75 \\ 4 \overline{) 23} \\ - 20 \\ \hline 30 \\ - 28 \\ \hline 20 \\ - 20 \\ \hline 00 \end{array}$$

म्हणजे 5.75 लीटर याचा अर्थ

5 लीटर 750 मिली

• • •

दशांश अपूर्णाकांची बेरीज व वजाबाकी

कृष्णाने 7 लीटर आणि 550 मिली एवढे दूध दिले. रामरावाने 5 लीटर आणि 700 मिली एवढे दूध दिले. किसनरावांनी 8 लीटर आणि 300 मिली दूध दिले. तर एकूण किती लीटर दूध झाले ?

आधी मिली मधील दुधाचा विचार करू

550 मिली

+ 700 मिली

+ 300 मिली

1550 मिली

1550 मिली म्हणजे 1 लीटर आणि 550 मिली

लीटरमधील दूध $7 + 5 + 8 = 20$ लीटर

1 लीटर 550 मिली

+ 20 लीटर

एकूण = 21 लीटर 550 मिली

हीच बेरीज पुढीलप्रमाणे करतात

7.550 लीटर

+ 5.700 लीटर (येथे एकक लीटर आहे.)

+ 8.300 लीटर

21.550 लीटर

दशांश अपूर्णाकांची बेरीज किंवा वजाबाकी करताना, दशांश चिन्हे एकमेकांखाली येणे गरजेचे आहे.

दशांश अपूर्णाकांची बेरीज पाहूया

$$72.356 + 144.52 + 24.375 + 4355.23$$

$$\begin{array}{r} 72.356 \\ + 144.520 \quad (\text{नोंद घ्या } 144.520 \text{ म्हणजेच } 144.52) \\ + 24.375 \\ + 4355.230 \quad (4355.23 \text{ म्हणजेच } 4355.230) \\ \hline 4596.481 \end{array}$$

- 5 लीटर आणि 750 मिली 5.750 लीटर असे लिहितात.
- 5 लीटर आणि 75 मिली हे 5.075 लीटर असे लिहितात.
- 5 लीटर आणि 9 मिली म्हणजे 5.009 होय.

$\frac{55}{10}$ हा अंशाधिक अपूर्णाक आहे, याचे दशांश अपूर्णाकांतील रूप पाहूया.

$$\begin{array}{r} 5.5 \\ 10 \overline{) 55} \\ \underline{- 50} \\ 50 \\ \underline{- 50} \\ 00 \end{array}$$

$$\frac{55}{10} = 5.5$$

वरीलप्रमाणे छेद 10 च्या पटीत असताना व्यक्त होणारे दशांश अपूर्णाक पाहूया.

$$\begin{array}{l|l|l} \frac{55}{10} = 5.5 & \frac{555}{10} = 55.5 & \frac{55}{1000} = 0.055 \\ \frac{555}{10} = 55.5 & \frac{55}{100} = 0.55 & \frac{55}{10000} = 0.0055 \end{array}$$

• • •

दशांक अपूर्णाकांचा गुणाकार

1) 0.055×3

म्हणजे 0.055 हे 3 वेळा म्हणून

$$\begin{array}{r} 0.055 \\ + 0.055 \\ + 0.055 \\ \hline 0.165 \end{array}$$

किंवा

$$\begin{array}{r} 0.055 \\ \times 3 \\ \hline 0.165 \end{array}$$

किंवा

$$\begin{array}{l} 0.055 \text{ म्हणजे } \frac{55}{1000} \\ \frac{55}{1000} \times 3 = \frac{165}{1000} = 0.165 \end{array}$$

2) 0.55×3 म्हणजे 0.55 हे 3 वेळा म्हणून

$$\begin{array}{r} 0.55 \\ + 0.55 \\ + 0.55 \\ \hline 1.65 \end{array}$$

किंवा

$$\begin{array}{r} 0.55 \\ \times 3 \\ \hline 1.65 \end{array}$$

किंवा

$$\begin{array}{l} 0.55 \text{ म्हणजे } \frac{55}{100} \\ \frac{55}{100} \times 3 = \frac{165}{100} = 1.65 \end{array}$$

27

$$\begin{array}{r}
 3) \quad 5.5 \times 3 \text{ म्हणजे} \quad 5.5 \\
 + 5.5 \\
 \hline
 + 5.5 \\
 \hline
 16.5
 \end{array}$$

किंवा

$$5.5 \times 3 = 16.5$$

किंवा

5.5 म्हणजे

$$\frac{55}{10} \times 3 = \frac{165}{10} = 16.5$$

$$\begin{array}{r}
 4) \quad 55 \times 3 \text{ म्हणजे} \quad 55 \\
 + 55 \\
 \hline
 + 55 \\
 \hline
 165
 \end{array}$$

किंवा

$$\begin{array}{r}
 55 \\
 \times 3 \\
 \hline
 165
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & 1.4 \times 1.2 \\
 & 1.4 \times 1.2 = \frac{14}{10} \times \frac{12}{10} \\
 & = \frac{168}{100} = 1.68
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & 2.66 \times 1.3 \\
 & 2.66 \times 1.3 = \frac{266}{100} \times \frac{13}{10} \\
 & = \frac{3458}{1000} = 3.458
 \end{aligned}$$

• • •

अपूर्णाकाची रोजच्या जीवनातील उदाहरणे

राधाकडे 200 पानांच्या सहा वह्या आहेत. प्रत्येक वहीचे वजन 250 ग्रॅम आहे. 100 पानांच्या 4 वह्यांचे वजन प्रत्येकी 125 ग्रॅम आहे. 5 पुस्तकांचे एकूण वजन 2000 ग्रॅम म्हणजे 2 किलोग्रॅम आहे. डबा भरलेला असताना त्याचे वजन 500 ग्रॅम, पाण्याने भरलेल्या बाटलीचे वजन 500 ग्रॅम आणि दप्तराचे वजन 500 ग्रॅम आहे. कंपास व लेखन साहित्य याचे वजन 500 ग्रॅम आहे. एकूण दप्तरासापेक्ष कोणाचे वजन किती हे अपूर्णाकात बघूया.

1.	200 पानी 6 वह्यांचे वजन	= 250 x 6	= 1500 ग्रॅम
2.	100 पानी 4 वह्यांचे वजन	= 125 x 4	= 500 ग्रॅम
3.	5 पुस्तकांचे वजन	= 2 कि.ग्रॅ.	= 2000 ग्रॅम
4.	भरलेल्या डब्याचे वजन	= 500 ग्रॅम	= 500 ग्रॅम
5.	पाण्याने भरलेल्या बाटलीचे वजन	= 500 ग्रॅम	= 500 ग्रॅम
6.	दप्तराचे वजन	= 500 ग्रॅम	= 500 ग्रॅम
7.	कंपास व लेखन साहित्य यांचे वजन	= 500 ग्रॅम	= 500 ग्रॅम

एकूण वजन = 6000 ग्रॅम

6000 ग्रॅम म्हणजे 6 किलोग्रॅम

1) 200 पानी वह्यांचे एकूण वजन 1500 ग्रॅम हे 6000 ग्रॅम पैकी आहेत.

$$\therefore \frac{1500}{6000} = \frac{1500}{6000} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

एकूण वजनापैकी $\frac{1}{4}$ वजन हे 200 पानी वह्यांचे आहे.

2) 100 पानी वह्यांचे एकूण वजन 500 ग्रॅम आहे हे 6000 ग्रॅम पैकी आहे.

$$\therefore \frac{500}{6000} = \frac{500}{6000} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$$

एकूण वजनापैकी $\frac{1}{12}$ वजन हे 100 पानी वह्यांचे आहे.

3) 5 पुस्तकांचे एकूण वजन 2000 ग्रॅम आहे. हे 6000 ग्रॅम पैकी आहे

$$\therefore \frac{2000}{6000} = \frac{2000}{6000} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

एकूण वजनापैकी $\frac{1}{3}$ वजन 5 पुस्तकांचे आहे.

4) भरलेल्या डब्याचे वजन 500 ग्रॅम आहे. हे 6000 ग्रॅम पैकी आहे.

$$\therefore \frac{500}{6000} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$$

एकूण वजनापैकी $\frac{1}{12}$ वजन भरलेल्या डब्याचे आहे.

5) पाण्याने भरलेल्या बाटलीचे वजन 500 ग्रॅम आहे. हे 6000 ग्रॅम पैकी आहे.

\therefore एकूण वजनापैकी $\frac{1}{12}$ वजन भरलेल्या पाण्याच्या बाटलीचे आहे.

6) दप्तराचे वजन, कंपास व लेखन यांचे वजन 500 ग्रॅम आहे. हे 6000 ग्रॅम पैकी आहे.

\therefore एकूण वजनापैकी $\frac{1}{12}$ वजन दप्तराचे आहे व $\frac{1}{12}$ वजन कंपास व लेखन साहित्याचे आहे.

एकूण वजन = 200 पानी वह्या + 100 पानी वह्या + 5 पुस्तके +
डब्याचे वजन + बाटलीचे वजन + दप्तराचे वजन +
कंपास व लेखन साहित्याचे वजन

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$$

$$\therefore \text{लसावि} = 12$$

$$= \left(\frac{1}{4} \times \frac{3}{3}\right) + \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{4}\right) + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{3}{12} + \frac{1}{12} + \frac{4}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$$

$$= \frac{12}{12} = 1$$

2) बसचे प्रवासी, इंधन व इतर सामानासहित असणारे वजन पुढीलप्रमाणे आहे.

बसचे वजन = 5000 किलो ग्रॅम

इंधनाचे वजन = 250 किलोग्रॅम

प्रवाशांचे वजन = 2750 किलोग्रॅम

सामानाचे वजन = 1000 किलोग्रॅम

एकूण वजन = 9000 किलोग्रॅम

एकूण वजनाच्या सापेक्ष इतरांचे वजन अपूर्णाकात पाहूया.

1) बसचे वजन 5000 किलोग्रॅम हे 9000 किलोग्रॅम पैकी आहे.

$$\therefore \frac{5000}{9000} = \frac{5000}{9000} = \frac{5}{9}$$

2) इंधनाचे वजन 250 किलोग्रॅम हे 9000 किलोग्रॅम पैकी आहे.

$$\therefore \frac{250}{9000} = \frac{250}{9000} = \frac{1}{36}$$

3) प्रवाशांचे वजन 2750 किलोग्रॅम आहे. हे 9000 किलोग्रॅम पैकी आहे.

$$\therefore \frac{2750}{9000} = \frac{2750}{9000} = \frac{11}{36}$$

4) साहित्याचे वजन 1000 किलोग्रॅम आहे. हे 9000 किलोग्रॅम पैकी आहे.

$$\therefore \frac{1000}{9000} = \frac{1000}{9000} = \frac{1}{9}$$

∴ एकूण वजन = बसचे वजन + इंधनाचे वजन + प्रवाशांचे वजन + सामानाचे वजन

$$= \frac{5}{9} + \frac{1}{36} + \frac{11}{36} + \frac{1}{9}$$

लसावि 36 आहे.

$$\therefore \left(\frac{5 \times 4}{9 \times 4} \right) + \frac{1}{36} + \frac{11}{36} + \left(\frac{1 \times 4}{9 \times 4} \right)$$

$$= \frac{20}{36} + \frac{1}{36} + \frac{11}{36} + \frac{4}{36}$$

$$= \frac{36}{36}$$

$$= 1$$

3) अभिजीतकडे वेगवेगळ्या प्रकारचे एकूण 64 चेंडू आहेत. त्यांची संख्या अपूर्णाकात मांडूया.

टेनिसचे 10 चेंडू

टेबल टेनिसचे 15 चेंडू

बिलीयर्डस्चे 25 चेंडू

व्हॉलिबॉलचे 6 चेंडू

हँडबॉलचे 8 चेंडू

$$\text{टेनिसचे चेंडू} \quad 64 \text{ पैकी } 10 = \frac{10}{64} = \frac{5}{32}$$

$$\text{टेबल टेनिसचे चेंडू} \quad 64 \text{ पैकी } 15 = \frac{15}{64}$$

$$\text{बिलीयर्डस्चे चेंडू} \quad 64 \text{ पैकी } 25 = \frac{25}{64}$$

$$\text{व्हॉलिबॉलचे चेंडू} \quad 64 \text{ पैकी } 6 = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

$$\text{हँडबॉलचे चेंडू} \quad 64 \text{ पैकी } 8 = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$$

$$\text{एकूण चेंडू} = \frac{5}{32} + \frac{15}{64} + \frac{25}{64} + \frac{3}{32} + \frac{1}{8}$$

लसावि 64 आहे.

$$\therefore \left(\frac{5 \times 2}{32 \times 2} \right) + \frac{15}{64} + \frac{25}{64} + \left(\frac{3 \times 2}{32 \times 2} \right) + \left(\frac{1 \times 8}{8 \times 8} \right)$$

$$= \frac{10}{64} + \frac{15}{64} + \frac{25}{64} + \frac{6}{64} + \frac{8}{64}$$

$$= \frac{10 + 15 + 25 + 6 + 8}{64} = \frac{64}{64} = 1$$

4) माधव काकांकडे पुण्यात 2 एकर जमीन, सातारात 5 एकर, भोरला 7 एकर आणि कोल्हापूरत 6 एकर जमीन आहे. त्यांच्या जमिनी अपूर्णाकात मांडूया.

पुणे 2 एकर

सातारा 5 एकर

भोर 7 एकर

कोल्हापूर 6 एकर

एकूण जमीन 20 एकर

$$\text{पुणे} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \quad \text{कोल्हापूर} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$\text{सातारा} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \quad \text{भोर} = \frac{7}{20}$$

$$\therefore \text{एकूण जमीन} = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{7}{20} + \frac{3}{10}$$

$$\text{लसावि} = 20$$

$$= \left(\frac{1 \times 2}{10 \times 2} \right) + \left(\frac{1 \times 5}{4 \times 5} \right) + \frac{7}{20} + \left(\frac{3 \times 2}{10 \times 2} \right)$$

$$= \frac{2}{20} + \frac{5}{20} + \frac{7}{20} + \frac{6}{20}$$

$$= \frac{2 + 5 + 7 + 6}{20} = \frac{20}{20} = 1$$

- 5) समीरच्या आई-वडिलांना मिळून महिना पगार 30,000/- रुपये आहे. त्या रक्कमेतून $\frac{1}{6}$ एवढी रक्कम घरभाडे आहे. $\frac{1}{5}$ एवढी रक्कम अन्न-धान्यासाठी खर्च होते. $\frac{1}{10}$ एवढी रक्कम प्रवास खर्चात जाते. $\frac{1}{10}$ एवढी रक्कम मुलांच्या अभ्यास-साहित्य, फी व वड्यांसाठी खर्च होते. पगारातील $\frac{1}{3}$ भाग बचत केला जातो. $\frac{1}{30}$ एवढी रक्कम अनाथाश्रमात दिली जाते. $\frac{1}{15}$ एवढा भाग हा ऐनवेळी येणाऱ्या कामासाठी वापरला जातो. म्हणजे प्रत्येक ठिकाणी किती रुपये दिले जातात हे आपण पाहूया.

i) $\frac{1}{6}$ एवढी रक्कम घरभाडे
30,000 चे $\frac{1}{6}$ म्हणजे $30,000 \times \frac{1}{6} = \frac{30000}{6} = 5000$

ii) $\frac{1}{5}$ एवढी रक्कम अन्न-धान्यासाठी
30,000 चे $\frac{1}{5}$ म्हणजे $30,000 \times \frac{1}{5} = \frac{30000}{5} = 6000$

iii) $\frac{1}{10}$ एवढी रक्कम प्रवास खर्च
30,000 चे $\frac{1}{10}$ म्हणजे $30,000 \times \frac{1}{10} = \frac{30000}{10} = 3000$

iv) $\frac{1}{10}$ एवढी रक्कम मुलांच्या अभ्यास साहित्य, फी, वड्यांसाठी
30,000 चे $\frac{1}{10}$ म्हणजे = 3000

v) $\frac{1}{10}$ भाग बचत

30,000 चे $\frac{1}{3}$ म्हणजे

$$30000 \times \frac{1}{3} = \frac{30000}{3} = 10000$$

vi) $\frac{1}{30}$ भाग अनाथाश्रमासाठी

30,000 चे $\frac{1}{30}$ म्हणजे

$$30000 \times \frac{1}{30} = \frac{30000}{30} = 1000$$

vii) $\frac{1}{15}$ भाग अचानक येणाऱ्या कामासाठी

30,000 चे $\frac{1}{15}$ म्हणजे

$$30000 \times \frac{1}{15} = 2000$$

- 6) हॉस्पिटलला रोज 1 लाख लीटर पाण्याची सोय केलेली असेल, त्यातील $\frac{1}{2}$ एवढे पाणी स्वच्छतेसाठी वापरले जाते. $\frac{1}{10}$ एवढे पाणी पिण्यासाठी, $\frac{1}{20}$ एवढे पाणी उपकरणांच्या स्वच्छतेसाठी, $\frac{1}{5}$ एवढे पाणी पेशंटच्या स्वच्छतेसाठी व उरलेले $\frac{15}{100}$ एवढे पाणी बगीच्यासाठी ठेवले आहे.
तर प्रत्येक कामासाठी लागणारे पाणी लिटरमध्ये काढूया.

i) $\frac{1}{2}$ एवढे पाणी स्वच्छतेसाठी
 $\therefore 100000 \times \frac{1}{2} = \frac{100000}{2} = 50,000$ लीटर

ii) $\frac{1}{10}$ एवढे पाणी पिण्यासाठी
 $\therefore 100000 \times \frac{1}{10} = \frac{100000}{10} = 10,000$ लीटर

iii) $\frac{1}{20}$ एवढे पाणी उपकरणांच्या स्वच्छतेसाठी
 $\therefore 100000 \times \frac{1}{20} = \frac{100000}{20} = 5,000$ लीटर

iv) $\frac{1}{5}$ एवढे पाणी पेशंटच्या स्वच्छतेसाठी
 $\therefore 100000 \times \frac{1}{5} = \frac{100000}{5} = 20,000$ लीटर

v) $\frac{15}{100}$ एवढे पाणी बगीच्यासाठी
 $\therefore 100000 \times \frac{15}{100} = \frac{1500000}{100} = 15,000$ लीटर

7) शारदा व रविंद्र हे आपला दिवसाचा पूर्ण वेळ खालीलप्रमाणे घालवतात. हा वेळ अपूर्णाकात मांडला आहे.

24 तासापैकी शारदा 8 तास झोपते म्हणजे $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

6 तास शाळेत जाते म्हणजे $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

4 तास खेळते म्हणजे $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

3 तास अभ्यास करते म्हणजे $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

2 तास स्वतःची कामे करते म्हणजे $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

1 तास आईला मदत करते म्हणजे $\frac{1}{24} = \frac{1}{24}$

24 तासात रविंद्र 6 तास झोपतो म्हणजे $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

6 तास शाळेत जातो म्हणजे $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

4 तास अभ्यास करतो म्हणजे $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

2 तास आईला मदत करतो म्हणजे $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

3 तास खेळतो म्हणजे $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

2 तास स्वतःची कामे करतो म्हणजे $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

1 तास अंध मुलांना पुस्तके वाचून दाखवतो $\frac{1}{24} = \frac{1}{24}$

8) जगातील अन्नधान्याचे उत्पादन साधारणपणे 1800 दशलक्ष टन आहे. यामध्ये असणाऱ्या अन्नधान्याचे प्रमाण खाली दिलेले आहे. ते अपूर्णाकात मांडले आहे.

अन्नधान्य	प्रमाण (दशलक्ष टन)
गव्हाचे उत्पादन	540
तांदळाचे उत्पादन	720
ज्वारीचे उत्पादन	90
बाजरीचे उत्पादन	18
डाळीचे उत्पादन	72
मक्याचे उत्पादन	360
एकूण =	1800

\therefore गव्हाचे उत्पादन $= \frac{540}{1800} = \frac{54}{180} = \frac{3}{10}$

\therefore तांदळाचे उत्पादन $= \frac{720}{1800} = \frac{72}{180} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

\therefore ज्वारीचे उत्पादन $= \frac{90}{1800} = \frac{9}{180} = \frac{1}{20}$

\therefore बाजरीचे उत्पादन $= \frac{18}{1800} = \frac{1}{100}$

\therefore डाळीचे उत्पादन $= \frac{72}{1800} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

\therefore मक्याचे उत्पादन $= \frac{360}{1800} = \frac{36}{180} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

• • •

ग्रहमालेतील ग्रहांचे वस्तुमान

NOTES

ग्रहांची नावे	वस्तुमान
1. बुध	0.33×10^{24} किलोग्रॅम
2. शुक्र	4.87×10^{24} किलोग्रॅम
3. पृथ्वी	5.98×10^{24} किलोग्रॅम
4. मंगळ	0.65×10^{24} किलोग्रॅम
5. गुरु	1900×10^{24} किलोग्रॅम
6. शनी	570×10^{24} किलोग्रॅम
7. युरेनस	87×10^{24} किलोग्रॅम
8. नेपच्युन	100×10^{24} किलोग्रॅम

येथे ग्रहमालेतील सर्वच ग्रहांचे वस्तुमान हे 10 च्या 24 व्या घातांकाच्या स्वरूपात मांडलेले आहे. 10^{24} ला गुणणारी संख्या दशांश अपूर्णाकात व्यक्त केली.
येथे दिलेल्या माहितीवरून आंतरग्रहांचे एकूण वस्तुमान किती आहे हे पहा.
गुरुचे एकूण वस्तुमान ग्रहमालेसापेक्ष किती आहे ?

• • •